Problem No. 1（微分積分）

以下の問に答えよ．e は自然対数の底，i は虚数単位である．
<u>導出の過程を省略し，答えのみを示せ.</u>

(問 1) 実関数 $f(x)$ を以下のように定義する．

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t^2}$$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ の $x = 0$ まわりの 3 次までのテイラー展開を求めよ．

(問 2) 2 つの実関数 $x(t)$, $y(t)$ が以下の連立微分方程式を満たすとする．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\nu x - y + A\cos at$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\nu y + x + A\sin at$$

ここで，A, a, ν $(\nu > 0)$ は実定数である．

(1) $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ とおくとき，$z(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $A = 0$ のとき，$x(t)$, $y(t)$ の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(3) $A > 0$ のとき，$t \to \infty$ で $x(t)$ は初期条件に関わらず $x_1(t) = B\cos(bt + \phi)$ に漸近する．ここで，B $(B > 0)$, b, ϕ は実定数である．B, b, ϕ を求めよ．

(問 3) 実関数 $f(x)$ を以下のように定義する．

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

(1) $f(x)$ の全ての極値と，それに対する x の値を求めよ．

(2) xy 直交座標系において，$0 \leq y \leq f(x)$ かつ $x > 0$ である領域の面積を求めよ．

(3) xyz 直交座標系において，xy 平面上で定義される (2) の領域を x 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(4) (3) の立体表面は，実関数

$$g(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^2\mathrm{e}^{-2x}$$

を用いて，$g(x, y, z) = 0$ と表される．$g(x, y, z)$ の勾配ベクトルを求めよ．

(5) (3) の立体表面の $x > 0$ の領域において，$h(x, y, z) = xyz$ が最大となる座標 (x, y, z) と，そのときの最大値を求めよ．

Problem No. 2.1（線形代数）

行列とベクトルの転置は上付き記号 $\top$ によって表す．また正方行列 J に対して，その指数関数は

$$\mathrm{e}^J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k$$

によって定義される．以下の問に答えよ．

(問 1) 次の実行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ただし，β は定数である．導出を省略し，答えのみを示せ．

(1) A の固有値 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ を求めよ．

(2) 次式を満たす行列 P を求めよ．

$$P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(3) 変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つとする．β の値を求めよ．また，この方程式の解をすべて求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-At} \boldsymbol{c}$ を求めよ．ただし t は実数である．

(問 2) B を $n \times n$ の実非対称行列とする．

(1) B と $B^\top$ の固有値が一致することを示せ．ある正方行列とその転置行列の行列式が一致することは既知の事実として利用してよい．

(2) B の固有値を λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ とする．また固有値 λ_i に対応する B と $B^\top$ の固有ベクトルを，それぞれ，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{v}_i$ とする．すなわち，

$$B\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$
$$B^\top \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

が成立する．$\lambda_i \neq \lambda_j$ に対して，$\boldsymbol{v}_j^\top \boldsymbol{u}_i = 0$ となることを示せ．

Problem No. 2.2（確率・統計）

以下の問に答えよ．e は自然対数の底，i は虚数単位である．
導出の過程を省略し，答えのみを示せ．

(問 1) 確率変数 X, Y のそれぞれにおいて，平均 $\overline{X} = 1, \overline{Y} = 2$，分散 $s_X = 1, s_Y = 2$，また共分散 $s_{XY} = -1$ とする．確率変数 U, V を $U = X + 3, V = X + Y$ と定義する．

(1) U, V の平均 $\overline{U}, \overline{V}$ を求めよ．

(2) U, V の分散 s_U, s_V を求めよ．

(3) U, V の共分散 s_{UV} を求めよ．

(問 2) 確率変数 X は標準コーシー分布

$$p(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

に従うものとする．以下の問に答えよ．

(1) 標準コーシー分布の累積分布関数 $F(x)$ を求めよ．

(2) 区間 $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数を U とする．確率 $\Pr(U \leq F(x))$ を求めよ．ただし，$F(x)$ は (1) の累積分布関数である．

(3) (2) の U に対して，$X = g(U)$ を満たす実関数 $g(U)$ を求めよ．

(4) 標準コーシー分布の特性関数 $\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} p(x) \mathrm{d}x$ を求めよ．t は実数である．

(5) n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で同一の標準コーシー分布に従うものとする．確率変数 Z を $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ と定義する．Z が従う確率密度関数を求めよ．

(問 3) 確率変数 X, Y の N 個の標本の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ がある．この標本の組に対して，以下の統計量を定義する．

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_i, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

以下の関数 l を最小化することにより，回帰直線 $Y = A_0 + A_1 X$ を求める．

$$l(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - A_0 - A_1 x_i\right)^2$$

ここで，関数 l は $A_0 = a_0, A_1 = a_1$ において最小となるものとする．a_0, a_1 を $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}$ を用いて表せ．また，a_0, a_1 が共に一意に定まる条件を示せ．

Problem No. 2.3（力学）

以下の問に答えよ．重力加速度を定数 $g\,(>0)$ とする．解のみ示せ．

(問 1) 原子 B が 2 つの原子 A に挟まれた，直線状の分子 ABA を，2 本のばね定数 k の質量のないばねで結ばれた 3 質点系と考える．原子 A の質量を m，原子 B の質量を M とする．原子は共通の直線上を運動するとし，重力の影響は無視できるものとする．

(1) 3 つの原子が従う運動方程式をそれぞれ書け．ばねが自然長のときの位置を基準とする原子 A，B，A の変位を，一方の原子 A から他方の原子 A に向かう方向を正として，それぞれ，x，y，z とする．

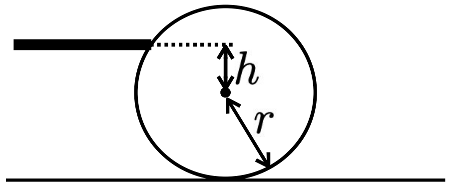
(2) 変数 $Q_1 = x + z$，$Q_2 = x - z$ を導入し，それぞれの振動の角周波数 ω_1，ω_2 を求めよ．分子の重心は動かないとする．

(問 2) 初速度 $v\,(\neq 0)$ で仰角 θ をなす方向に質点を投げる．質点の初期位置を原点とし，初速度の水平成分の正の向きに x 軸をとり，鉛直上向きに y 軸をとる．

(1) $x = X\,(>0)$ における質点の鉛直位置 y を X，g，θ，v を用いて表せ．

(2) $x = X\,(>0)$ において，いかなる角 θ であっても質点が到達できない鉛直位置 y の範囲を X，g，v を用いて表せ．

(問 3) 水平な摩擦のない台の上に，質量 m，半径 r の密度一様な剛体球が静止している．下図のように球を棒で水平方向に突き，球が滑らないように転がしたい．球を突く中心からの鉛直位置 h を m，r，及び球の慣性モーメント I を用いて表せ．



(問 4) 地球を，南極と北極を結ぶ軸について東回りに一定の角速度 ω で回転する剛体球とする．北半球上の緯度 $\theta\,(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の点 P を原点として地表面に固定された座標系を (x, y, z) とし，地球中心から点 P の方向を z 軸の正の向き，点 P における接平面上で南を x 軸の正の向き，東を y 軸の正の向きとする．点 P において，z 軸の正の方向に初速度 v で質量 m の質点を投げる．

(1) 座標系 (x, y, z) における地球の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の x，y，z 成分をそれぞれ書け．

(2) 座標系 (x, y, z) における質点の運動方程式は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，その時間についての一階微分 $\dot{\boldsymbol{r}}$，二階微分 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を用いて下記のように表せる．

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + 2m\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg)$$

質点を投げたあとの経過時間 t における y 方向の質点の加速度を，g，t，v，ω，θ を用いて書け．ω^2 以上のオーダーの項は無視せよ．

Problem No. 2.4（電磁気学）

真空中での現象として，以下の問に答えよ．なお，問 5(2) を除き解のみ記せ．

(問 1) 真空中の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする．

(1) 光速を ε_0 と μ_0 を用いて記せ．

(2) 距離 r 離れて 2 本の平行な無限に長い導線がある．同じ方向にそれぞれ電流 I が流れているとき，この 2 本の導線の単位長さに加わる力の大きさと向きを答えよ．

(問 2) 図 1 のような回路がある．R_1，R_2，R_3 は抵抗で，その抵抗値はそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする．

(1) AB 間の合成抵抗値を r_1，r_2，r_3 を用いて記せ．

(2) AB 間に一定電圧 V を印加する．R_3 に流れる電流と R_2 で消費される電力を V，r_1，r_2，r_3 を用いて記せ．

(問 3) 図 2 のような回路がある．回路の AB 間に角周波数 ω，振幅 $\tilde{V}$ の交流電圧を印加する．L はコイルのインダクタンス，C はコンデンサの静電容量，R は抵抗の抵抗値，j を虚数単位とする．

(1) AB 間の複素合成インピーダンスを ω，L，C，R を用いて記せ．

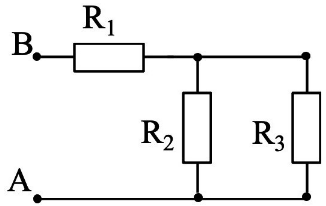


図 1

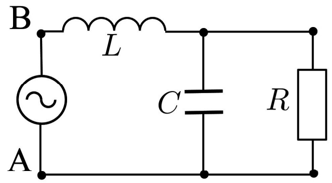


図 2

(2) コンデンサを通る電流の振幅 $\tilde{I}_C$ と抵抗を通る電流の振幅 $\tilde{I}_R$ の比 $\tilde{I}_C/\tilde{I}_R$ の絶対値を求めよ．

(3) コンデンサを取り外しコンデンサのない回路を考える．AB 間の電圧変化を $V = \tilde{V}e^{j\omega t}$ と表現する．この回路でコイルに流れる電流を ω，L，R，V を用いて表せ．また，抵抗で消費される実効電力を ω，L，R，$\tilde{V}$ を用いて記せ．(実効電力とは平均的に消費される電力である．)

(問 4) 図 3 のような面積 S を持つ一巻きの導線からなる閉回路がある．この閉回路を横切る磁束による誘導起電力 V の式を Maxwell 方程式の一つ

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

より求め、結果の式のみ記せ．ただし，$\boldsymbol{B}$ は外部から与えた磁束密度，$\boldsymbol{E}$ は与えられた磁束密度により誘導された電場とする．回路は平面上にあり，磁束密度は空間一様とする．回路のある面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，導線の太さは無視する．

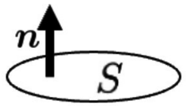


図 3

(問 5) 図 4(a) の破線で示された一辺の長さ L の正方形が，xyz 直交座標系の xy 平面上にある．この正方形の辺に沿って，導線を同じ向きに二巻きし、一繋がりの閉回路を作る．この導線は長さ L 当たり抵抗値 R を持つ．ここに z 方向の正の向きに一様な磁束密度を与える．t を時刻として磁束密度の大きさ B は，図 4(b) のように $t \leq t_s$ では B_s であり，$t \geq t_e$ では B_e であり，$t_s < t < t_e$ では一定の割合で変化する．$t_s < t < t_e$ についての以下の問に答えよ．ただし，回路の自己インダクタンス，導線の太さは無視する．

(1) 回路に発生する誘導起電力の大きさ V を上に与えられた変数を用いて記せ.

(2) 導線に加わる力について V，R，L を用いて 5 行程度で述べよ.

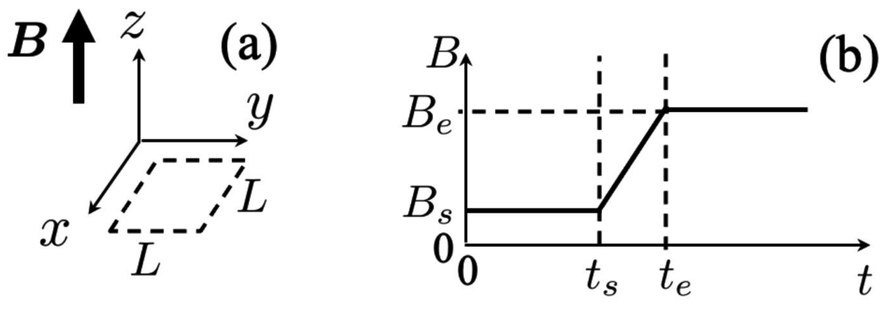


図 4